



باسمه تعالی

سؤالات امتحانی پایان ترم. نیمسال دوم سال تحصیلی 03-02

تاریخ امتحان : 1403/03/22

نام استاد :

عنوان درس : ریاضی عمومی 2

شماره صفحه: 1

تعداد سوال : 6

مدت امتحان : 110 دقیقه

شماره دانشجویی:

نام و نام خانوادگی دانشجو:

«به همراه داشتن موبایل (خاموش یا روشن) و ساعت هوشمند تخلف محسوب گشته و اکیداً ممنوع می باشد»

بارم

1- اگر $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ، در چه جهتی مشتق در نقطه $(1, 1)$ ماکزیمم و در چه جهتی مینیمم می

باشد؟

20

20

2- کوتاهترین فاصله رویه $z = xy + 1$ تا مبدا را بیابید.

15

3- مساحت بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ را فقط با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

15

4- انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_{e^y}^e \frac{x}{\ln x} dx dy$$

20

5- انتگرال $\oint_C (e^x \sin y) dx + (e^x \cos y) dy$ را بر منحنی C به معادله $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ از نقطه $(2, 0)$ تا نقطه $(0, 1)$ محاسبه کنید.

20

6- حجم ناحیه محصور بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و داخل مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ را محاسبه کنید.

دانشجوی گرامی لطفاً در پایان جلسه امتحان، برگه سؤالات را به همراه پاسفنام و پیش نویس به مسئول جلسه تمویل نمائید.

موفق باشید

پایه سوالات امتحانی پایان ترم مسال دوا ۵۳-۵۲

۱- بیشترین مقدار شش جعبی در راستای بردار $\vec{r}$ و کمترین آن در خلاف جهت $\vec{r}$ قرار می‌گیرد.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \rightarrow \nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{4}{4}, \frac{-4}{4} \right) = (1, -1) = \vec{i} - \vec{j}$$

بیشترین مقدار شش جعبی در راستای $\vec{i} - \vec{j}$ و کمترین آن در راستای $\vec{j} - \vec{i}$ قرار می‌گیرد. که بردار $\vec{r}$ و $-\vec{r}$ را نشان می‌دهد.

$$\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} \text{ می‌باشند.}$$

۲- فاصله نقطه (x, y, z) تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است. با توجه به ناخنش بودن فاصله می‌توان

در محاسبه نقاطی که تا مبدأ کمترین فاصله را دارند از رادیکال صرف نظر کرد.

$$g(x, y, z) = xy - z + 1 = 0$$

حد فاصله جیسیم تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ باشد شرط

با استفاده از روش ضرب لاجرانژ داریم:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \Rightarrow 2x - \lambda y = 0 & (1) \\ f_y - \lambda g_y = 0 \Rightarrow 2y - \lambda x = 0 & (2) \\ f_z - \lambda g_z = 0 \Rightarrow 2z + \lambda = 0 & (3) \\ g = 0 \Rightarrow xy - z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$2x = \lambda y \Rightarrow 2x = \lambda \cdot \frac{\lambda x}{2} \Rightarrow \lambda^2 x = 4x \Rightarrow x(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$2y = \lambda x$$

$$\text{if } x = 0 \xrightarrow{(1)} y = 0 \xrightarrow{(4)} z = 1 \Rightarrow (0, 0, 1)$$

$$\text{if } \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \begin{cases} \lambda = 2 \xrightarrow{(3)} 2z = -\lambda = -2 \Rightarrow z = -1 \xrightarrow{(4)} xy = 2 \\ \xrightarrow{(1)} x = y \Rightarrow x = y = \sqrt{2} \text{ و } -\sqrt{2} \\ \lambda = -2 \xrightarrow{(3)} 2z = -\lambda = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = y = 0 \end{cases}$$

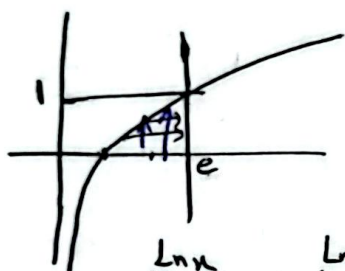
پس نقطه $(0, 0, 1)$ نقطه ای است که تا مبدأ کمترین فاصله را دارد.

۳- تغییر متغیر $\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = 3r \sin \theta \end{cases}$ و در نظر داریم پس را کپس برابر $2 \times 3 \times r = 4r$

$$A = \iint_D dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r \cdot dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 4r dr = \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot 2r^2 \Big|_0^1 = 3 \times 2\pi = 4\pi$$

۴- بار دگرهای استرال بر روی
ریاضی! محاسبه ساریت
های حدود را عوض کنیم

$$I = \int_1^e \int_{e^y}^e \frac{x}{\ln x} dx dy$$



$$I = \int_1^e \int_0^{\ln x} \frac{x}{\ln x} dy dx = \int_1^e \frac{x}{\ln x} \int_0^{\ln x} dy dx$$

$$\int_0^{\ln x} dy = y \Big|_0^{\ln x} = \ln x \Rightarrow I = \int_1^e \frac{x}{\ln x} \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

۵- $M = e^x \sin y, N = e^x \cos y$: $I = \int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y = \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \text{میان بردر است}$$

$$\exists \varphi; \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M = e^x \sin y \Rightarrow \varphi = \int e^x \sin y dx = e^x \sin y + g(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N = e^x \cos y \Rightarrow e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C \Rightarrow \varphi(x, y) = e^x \sin y + C$$

طبق قضیه استقلال از مسیر $\rightarrow I = \varphi(0, 1) - \varphi(1, 0) = e^0 \sin 1 + C - e^1 \sin 0 - C = \sin 1$

۶- $V = \iiint_G dV, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow \rho^2 = 1 \rightarrow \rho = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$

$\rho = 1$ $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$